**Bab 1**

**VEKTOR DI DALAM**

Dalam Bab Ini:

* Vektor didalam
* Pemjumlahan vektor dan Perkalian skalar vektor
* Hasil kali titik

Vektor didalam

Meskipun kita akan membatasi ruang lingkup pembahasan bab ini hanya pada vektor yang elemen-elemenya berasal dari medan bilangan real, dinotasikan dengan **R,** namun kebanyakan operasi yang akan dibahas juga berlaku untuk vektor yang akan dibahas juga berlaku dari beberapa seberang medan k.dalam konteks vektor,elemen-elemen dari medan bilangan disebut skalar.

Daftar bilangan

Anggaplah berat badan delapan orang mahasiswa (dalam kilogram menurut daftar berikut :

58 47 54 50 66 54 61 72

Kita dapat menotasikan seluruh nilai didalam daftar tersebut hanya dengan menggunakan satu simbol, katakanlah w,tetapi dengan subskrip yang berbeda;

Yaitu

Amati bahwa tiap subskrip menotasikan posisi dari suatu nilai di dalam daftar tersebut. Sebagai contoh=58, Bilangan pertama. =47,bilangan kedua,……

Daftar nilai seperti ini, w =­ (,,,……,) disebut *susunan linear* atau *vektor.*

Himpunan seluruh tupel *n ya*ng terdiri dari bilangan – bilangan real, dinotasikan dengan , disebut *ruang n*. sebuah tupel *n* tertentu di dalam ,misalnya *u* = (,,...,) disebut titk atau *vektor*. Bilangan-bilangan disebut  *koordinat, komponen, entri,*atau *elemen* dari *u.* Di samping itu,ketika membahas mengenai ruang,kita menggunakan istilah skalar untuk elemen-elemen dari **R.**

Dua vektor ,*u* dan *v* dikatakan sama,yang ditulis dengan  *u = v*, jika kedua vektor ini mempunyai jumlah komponen yang sama dan jika komponen –komponennya yang bersesuaian juga sama. Meskipun vektor (1,2,3) dan tidak sama karena entri-entri yang bersesuaian tidak sama

Vektor (0, 0, …,0) yang seluruh entrinya adalah 0 disebut  *vektor nol*,dan biasanya dinotasikan dengan 0.

**Contoh 1.1**

1. Berikut ini adalah vektor-vektor:

(2,-5) (7,9) (0,0,0) (3,4,5)

Dua vektor pertama termasuk ke dalam sementara dua vektor yang terakhir termasuk ke dalam . Vektor yang ketiga adalah vektor nol di dalam

1. Tentukan *x,y,z,*  sedemikian rupa sehingga (*x –y, x+y,z-1)* =(4,2,3).berdasarkan definisi dari kesamaan vektor, maka entri-entri yang bersesuaian haruslah sama. Sehinnga,

*x – y=4 x+y* =2  *z -1*=3

Dengan menyelesaikan system persamaan ini maka dihasilkan *x*=3*,y*=-1,*z*=4.

Vektor Kolom

Kadang – kadang sebuah vektor di dalam *n* ditulis secara vertical ,bukan horizontal . vektor seperti ini disebut sebagai *vektor kolom* dan disebut *vektor baris* . sebagai contoh ,berikut ini adalah vektor-vektor kolom masing–masing dengan komponen 2,2,3,dan,3:

, , ,

Perlu dicatat bahwa operasi apapun yang digunakan untuk vektor baris di definisikan secara analog vektor kolom

**Penjumlahan Vektor Dan Perkalian Skalar Vektor**

Perhatikan dua vektor *u* dan *v* di dalam, katakanlah

*u═(*,,…..) dan *v=(,,….)*

Jumlah kedua vektor ini , ditulis dengan *u+v*, merupakan vektor yang diperoleh dengan menjumlahkan komponen – komponen yang bersesuaian dari *u* dan *v*.dalam hal ini,

*u + v =*( + ,+,….+)

Hasil kali skalar,atau disingkat *hasil kali,* dari vektor *u* dengan sebuah bilangan *real k,*ditulis ku, adalah vektor yang diperoleh dengan mengalikan tiap komponen dari *u* dengan *k*. dalam hal ini,

*ku=k(,,…)=(k,k,….k)*

Amati bahwa *u + v* dan ku juga merupakan vektor – vektor di dalam ,penjumlahan vektor – vektor yang mempunyai jumlah komponenyang berbeda tidak dapat didefinisikan.

Nilai negative dan pengurangan dapat di definisikan di dalam sebagai berikut ;

-*u=(-1) u* dan *u –v =u+(-v)*

Vektor –*u* disebut negative dari *u,* dan *u* –*v* disebut selisih dari *u* dan v.

Sekarang anggaplah terdapat vektor-vektor , , … , di dalam dan skalar-skalar , …. di dalam **R** *.* Kita dapat mengalikan vektor-vektor tersebut dengan skalar-skalar yang bersesuaian dan kemudian menjumlahkan resultan hasilkali skalarnya untuk membentuk vektor

*V* = + + + …. +

**Contoh 1.2.**

1. Misalkan *u* = (2, 4, -5) dan *v* = (1, -6, 9). Maka

*u + v* = (2 + 1, 4 + (-5), -5 + 9) = (3, -1, 4)

7*u* = (7(2), 7(4), 7(-5) = (14, 28, -35)

*-v* = (-1)(1,-6, 9) = (-1, 6, -9)

3*u* – 5*v* = (6, 12, -15) + (-5, 30, -45) = (1, 42, -60)

1. Misalkan *u* = , *v* = . maka 2*u* – 3*v* = + =

Sifat-sifat dasar vektor dalam operasi penjumlahan vektor dan operasi pekalian skalar vektor diuraikan dalam teorema berikut.

**Teorema 1.1** : Untuk sebarang vektor *u, v, w*, di dalam dan sembarang skalar

k, di dalam **R**,

1. *(u + v) + w = u + (v + w)*. (v) k(u + v) = ku +kv,

(ii) *u + 0 = u*, (vi) (k + )u = ku +

(iii) *u + (-u) = 0*, (vii) (k

(iv) u + v = v +u, (viii) 1u = u.

Anggaplah u dan v adalah vektor-vektor di dalam dimana u = kv untuk suat skalar taknol k di dalam **R.** Maka u disebut kelipatan dari v. Demikian pula, u dikatakan sama dengan v ketika k < 0.

**Hasilkali Titik**

Perhatikan sebarang vektor *u* dan *v* di dalam ; katakanlah u = () dan  *v = (b1, b2, …., bn). Hasilkali titik* atau *hasilkali* dalam atau hasilkali skalar dari u dan v dinotasikan dan didenfinisikan dengan *u . v* = + + …. + . Dalam hal ini , *u . v* di peroleh dengan mengalikan komponen-komponen yang bersesuaian dan menjumlahkan hasilkali yang diperoleh. Vektor u dan vektor v dikatakan orthogonal (atau tegak lurus) jika hasilkali titiknya adalah nol; yaitu, jika *u . v* = 0.

**Contoh 1.3** Misalkan u = (1, -2, 3), *v* = (4, 5, -1), *w* = (2,7,4). Maka :

*u . v* = 1(4) - 2(5) + 3(-1) = 4 – 10 – 3 = -9

dan

*u . w* = 1(2) – 2(7) + 3(4) = 2 – 14 + 12 = 0

Dengan demikian u dam w adalah orthogonal. Sifat-sifat dasar dari hasilkali titik di dalam adalah sebagai berikut :

**Toerema 1.2:** Untuk sebarang vektor *u, v, w* di dalam dan sekarang skalark didalam **R:**

1. (*u + v*) . *w = u . w + v . w* (iii) *u . v = v . u*
2. (*ku*) . *v* = *k*(*u . v*) (iv) *u . u* ≥ 0 dan *u . u* = 0 jika u = 0.

Perhatikan bahwa (ii) menyatakan bahwa kita dapat “mengeluarkan *k*” dari posisi pertamanya didalam hasilkali dalam. Berdasarkan (iii) dan (ii), *u . (kv) = (kv) . u = k(u . v).*Dalam hal ini, kita juga dapat “*mengeluarkan k*” dari posisi keduanya di dalam hasilkali dalam.

Ruang dengan operasi-operasi penjumlahan vektor, perkalian skalar vektor, dan hasilkali titik seperti di atas biasanya disebut *ruang n Euclidean.*

**Norma (Panjang) dari sebuah Vektor**

Norma atau panjang dari vektor u di dalam , dinotasikan dengan ,

Di definisikan sebagai akar kuadrat teknegatif dari *u . u*. Secara khusus, jika *u = (),* maka llull = = Dalam hal ini llull adalah akar kuadrat dari jumlah kuadrat komponen-komponen dari u . sehingga llull 0 , dan llull

= o jika dan hanya jika u =0.

Vektor u disebut sebagai vektor satuan jika llull = 1 atau , secara ekuivalen ,

Jika u-u =1 . untuk sebarang vaktor taknol v di dalam vektor

Û = =

Persamaan diatas merupakanvektor satuan unik dengan arah yang sama dengan *u*.

|  |
| --- |
| Catat  Rumus berikut di kenal sebagai ketidaksamaan schwars  atau ketidaksamaan Cauchy-Schwarz. Rumus ini digunakan dalam berbagai cabang ilmu matematika. |

Teorema 1.3 (Schwarz) : untuk sebarang vector u, v di dalam ,|u . v| ≤ ||u|| ||v||. Rumus berikut dikenal sebagai ketidaksamaan segitiga atau ketidaksamaan Minkowski.

Teorema 1.4 (Minkowski): Untuk sebarang vector u, v di dalam ,

||u+v|| ≤ ||u||+||v||.